ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE

1985

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

(COMMUNE AUX DEUX OPTIONS)

DURÉE : 1 HEURE

N.B. : Ce sujet comporte 2 pages de texte.

On désigne par M la matrice réelle suivante :

$$\begin{bmatrix} -19{,}72 & 129{,}22 & 86{,}76 \\ -0{,}92 & 6{,}11 & 2{,}76 \\ -5{,}85 & 36{,}94 & 26{,}75 \end{bmatrix}$$

Cette matrice admet trois valeurs propres réelles distinctes λ, λ_1, λ_2 telles que :

$$|\lambda| > |\lambda_1| > |\lambda_2| > 1$$

(On ne cherchera pas à démontrer ce résultat).

I. On identifie chaque vecteur de $\mathbb{R}^3$ avec la matrice-colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Soit W un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que : $W = V + V_1 + V_2$, où V, V_1, V_2 sont des vecteurs propres de M associés respectivement à λ, λ_1, λ_2. p étant un entier naturel, calculer $M^p.W$ comme combinaison linéaire de : V, V_1, V_2.
(On rappelle qu'un vecteur propre est non nul).

2. On définit une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ par :

$X_0 = W$ et $X_{n+1} = \dfrac{MX_n}{a_{n+1}}$

où a_{n+1} est la composante de MX_n qui a la plus grande valeur absolue ;

$n = 0, 1, 2, \ldots$

a. Démontrer que :

$$a_n \neq 0 \quad \text{et} \quad X_n = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} P \begin{bmatrix} \lambda^n \\ \lambda_1^n \\ \lambda_2^n \end{bmatrix} \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$P = \left[p_{i,j}\right]_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ étant une matrice réelle 3 x 3.

b. Établir que lorsque n tend vers l'infini : $|a_1 a_2 \ldots a_n|$ est un infiniment grand équivalent à : $k\,|\lambda|^n$; où : $k = \max\left\{|p_{1,1}|, |p_{2,1}|, |p_{3,1}|\right\}$, $k \neq 0$.

c. En déduire que : $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lambda$, et que : X_n converge dans $\mathbb{R}^3$ vers X', vecteur propre associé à λ. (On rappelle qu'une suite X_n de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, converge vers X', si chaque coordonnée de X_n converge dans $\mathbb{R}$ vers la coordonnée correspondante de X').

II. Les résultats numériques seront donnés à 10^{-3} près.

1. On prend : $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calculer : X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.
On disposera les calculs sur une seule page.
On admettra que : $V \neq 0$.

2. Déduire du résultat précédent un vecteur propre à coordonnées entières associé à λ. Donner la valeur exacte de λ.

3. I désignant la matrice unité 3 x 3, démontrer qu'une autre valeur propre de M peut être calculée, par la méthode précédente, à partir de la matrice : $M - \lambda I$.